

DEVOIR SURVEILLÉ

1 Les questions 1) à 4) suivantes sont indépendantes.

- 1) Simplifier la somme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} 2^i j$, la somme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)}$ et le produit $\prod_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i^2}{j+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2^n(n+1)}{n+3} u_n$. Un calcul « et cetera » à base de points de suspension ne suffit pas, une récurrence est attendue.
- 3) a) On pose $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que valent ch' et sh' ?
 b) Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ peut être écrite d'une et une seule manière sous la forme :

$$x \mapsto a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + g(x)$$
 où a et b sont des réels et où $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction pour laquelle $g(0) = g'(0) = 0$.
- 4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$.
 b) Montrer, par exemple par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$, puis en déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2

- 1) **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : Exprimer $\sum_{0 \leq i, j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$ en fonction de $\sum_{k=0}^n a_k^2$, $\sum_{k=0}^n b_k^2$ et $\sum_{k=0}^n a_k b_k$ pour tous $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et retrouver ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left| \sum_{k=0}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2}$.

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose désormais $(x)_0 = 1$ et $(x)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (x-i)$, puis on généralise les coefficients binomiaux usuels en posant $\binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 2) **Formule du binôme négatif** : Soit $t \in]-1, 1[$ fixé. Pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(r) = \sum_{k=0}^n \binom{-r}{k} t^k$.
 a) Montrer que pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$: $S_n(r) = \sum_{k=0}^n \binom{k+r-1}{r-1} (-t)^k$.
 b) Montrer que pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$: $S_n(r) - (1+t)S_n(r+1) = \binom{n+r}{r} (-t)^{n+1}$.
 c) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$: $n^r t^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 d) Montrer que la suite $(S_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(1+t)^{-r}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.
 e) En déduire que pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$ pour lesquels $|x| < |y|$: $(x+y)^{-r} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-r}{k} x^k y^{-r-k}$.

Cette identité généralise la formule du binôme aux exposants négatifs et l'on découvre en passant que la formule du binôme classique fait apparaître une somme infinie qui s'ignore. En effet, $\binom{r}{k} = 0$ pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $k > r$, donc pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$: $(x+y)^r = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$.

- 3) **Pseudo-formule du binôme** : Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(x)_0 = 1$ et $(x)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k)$.
 a) Compléter pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $(x)_{n+1} = \dots \times (x)_n$.
 On fixe à présent $x, y \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(x+y)_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k}$ ★.
 b) **Initialisation** : Montrer que la relation ★ est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la relation ★ est vraie au rang n .
 c) Montrer que : $(x+y)_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k} (x-k) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k} (y-n+k)$.
 d) En déduire que la relation ★ est vraie au rang $n+1$.

4) Formule de Vandermonde et conséquence :

a) Dédurre d'★ que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (formule de Vandermonde).

b) Montrer que pour tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$: $\left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \right| \leq 2^n \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2}$.

c) Soit $\lambda > 0$. On suppose que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \right| \leq \lambda^n \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2}.$$

Montrer que $\lambda \geq 2$. Que signifie ce résultat ?

3 (Cet exercice n'est pas prioritaire et sera moins rémunéré que les précédents.)

On commence par un peu de vocabulaire. Soient E un ensemble, \preccurlyeq une relation d'ordre sur E et A une partie de E .

- On appelle *majorant de A* tout élément $M \in E$ pour lequel : $\forall a \in A, a \preccurlyeq M$.
- On dit que A est *majorée* si elle possède un majorant.
- On appelle *plus grand élément de A* tout élément de A qui est aussi un majorant de A .

On définit de façon analogue, en renversant les relations, les notions de *minorant*, *partie minorée* et *plus petit élément*.

Pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, on dit à présent que $(x, y) \triangleleft (x', y')$ si : $x + y < x' + y'$ ou $(x + y = x' + y'$ et $y \leq y')$.

- 1) Montrer que la relation \triangleleft est une relation d'ordre sur \mathbb{R}^2 . Est-elle totale ?
 - 2) Représenter graphiquement l'ensemble des minorants de $(1, 1)$ pour \triangleleft .
 - 3) Montrer que \mathbb{R}_+^2 possède un plus petit élément pour \triangleleft , mais pas $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Qu'en est-il de $\mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?
 - 4) Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2$ possède-t-il un plus grand élément pour \triangleleft ?
-

4 (Plus difficile) Vous ne vous lancez dans cet exercice que si vous estimez avoir très bien réussi tout le reste !

- 1) Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une fonction pour laquelle $f(n + 1) > f(f(n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq p, f(n) \geq p$.
 - 2) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ pour lesquelles $f(n + 1) > f(f(n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
-